DERIVADAS.

1. Aplicando la definición, calcula la derivada en x = 3 de la función f(x) = 5x^2 – x +2.

Sol: $f'(3) = 29$.

2. Aplicando la definición, calcula la derivada en x = 1 de la función $f(x) = \frac{2}{x^2+3}$.

Sol: $f'(1) = -\frac{1}{4}$.

3. Aplicando la definición, calcula la función derivada de la función del ejercicio anterior.

Sol: $f'(x) = -\frac{4x}{(x^2+3)^2}$.

4. Aplicando la definición, deduce la fórmula de la función derivada de $f(x) = \log_a x$, con $x > 0$.

5. Un móvil se traslada según la ecuación $s = 100 + 20t - 8t^2$ (S. I.). Calcula su velocidad media entre los instantes t = 3 s. y t = 5 s., su velocidad instantánea para t = 4 s. y la función velocidad instantánea.

Sol: $v_m = -44\ m/s$, $v(t=4) = -44\ m/s$, $v(t) = 20 - 16t$ *(S.I.).*

6. La población de una cierta colonia de insectos viene dada por la fórmula $y = 1.000^{t+1} - 1.000(t+1)$, donde t es el tiempo en meses e y el número de individuos de la población. Calcula la velocidad de crecimiento de la población a los doce meses.

Sol: $y'(12) = 1.000^{13} \cdot \ln 1.000 - 1.000$ *insectos/mes.*

7. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x-5}$

b) $f(x) = \text{tg}\ x$

c) $f(x) = \ln(x+1)$

d) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

e) $f(x) = |x| - x$

Sol: a) $\mathbb{R} - \{5\}$; *b)* $\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$ $(n \in \mathbb{Z})$; *c)* $(-1, +\infty)$; *d)* $\mathbb{R} - \{0\}$; *e)* $\mathbb{R} - \{0\}$.

8. Estudia la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{si } x<-2 \\ 1 \quad \text{si } -2\le x<1 \\ x \quad \text{si } 1\le x<3 \\ x^2-6x+12 \quad \text{si } 3\le x \end{cases}$$

Sol: f(x) es derivable en $(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ 1)\cup(1,\ 3)\cup(3,\ +\infty)$.

9. Averigua el valor de k para que la función

$$f(x)=\begin{cases} kx-5 \quad \text{si } x\le 0 \\ x^3-3x-5 \quad \text{si } x>0 \end{cases}$$

sea derivable en $x=0$.

Sol: $k=-3$.

10. ¿Qué valores han de tener a y b para que la función $y=\begin{cases} x^2-2x+3 \quad \text{si } x\le 2 \\ ax^2+b \quad \text{si } x>2 \end{cases}$ sea derivable en $x=2$?

Sol: $a=\frac{1}{2}$, $b=1$.

11. Averigua el valor de m y n para que la función $f(x)$ sea derivable en $x=2$, siendo:

$$f(x)=\begin{cases} mx+5 \quad \text{si } x\le 2 \\ nx^2+x-1 \quad \text{si } x>2 \end{cases}$$

Sol: $m=-5$, $n=-\frac{3}{2}$.

12. Calcula las funciones derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=-\frac{1}{\sqrt{x}}$

b) $y=\frac{x^2-3x+1}{x^3-4x+2}$

c) $f(x)=2\sqrt{x}+3\cdot\sqrt[3]{x}$

d) $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

e) $f(x)=tg(3x)$

f) $f(x)=tg(x^3)$

g) $f(x)=tg^3 x$

h) $y=\arccos(x^3-1)$

i) $y=e^{3x}\cdot\sqrt{x^2+1}$

j) $f(x)=\text{sen } x\cdot\cos\ x\cdot tg\ x$

k) $y=\left(1+\sqrt{x-1}\right)^2$

l) $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

m) $y=\dfrac{\ln\left(x^2+x\right)}{x^2}$

n) $f(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$

o) $y=\sqrt[6]{2x^5-3x^2}$

p) $y=\ln\dfrac{1+\text{sen }x}{\text{tg }x}$

q) $f(x)=\dfrac{x^2\text{sen }x}{2^x}$

r) $y=\text{arctg}\left(\text{arctg }x\right)$

s) $f(x)=\log\left(x^4-3x^2-1\right)$

t) $f(x)=\left(x+\cos^4 x\right)^3$

u) $y=\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

v) $f(x)=\text{arcsen}\sqrt{1-4x^2}$

w) $y=\dfrac{5^x\cdot x^5}{\sqrt{5x}}$

x) $f(x)=\cos(5x+3)\cdot\dfrac{4}{x^2+x+1}$

y) $y=\ln\sqrt{\cos x}$

z) $y=\cos\sqrt{x^2+2x}$

aa) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

bb) $f(x)=\dfrac{1+\text{tg}\frac{x}{2}}{1-\text{tg}\frac{x}{2}}$

cc) $y=\dfrac{\text{sen }x}{\text{sen }x+\dfrac{1}{\text{sen }x}}$

dd) $y=\text{sen}\left(\text{sen}\left(\text{sen }x^2\right)\right)$

ee) $f(x)=\dfrac{1}{4}\cdot\text{arctg}\left(\dfrac{1}{4}x\right)+\dfrac{1}{4}\cdot\ln\dfrac{1+x^4}{(1+x)^4}$

ff) $f(x)=\ln\left(\text{arctg}\dfrac{1+x^2}{x}\right)$

Sol: a) $y'=\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$; *b)* $y'=\dfrac{-x^4+6x^3-7x^2+4x-2}{\left(x^3-4x+2\right)^2}$; *c)* $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$;

d) $y'=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$; *e)* $f'(x)=3\cdot\sec^2(3x)$; *f)* $f'(x)=3x^2\sec^2 x^3$; *g)* $f'(x)=3\cdot\text{tg}^2x\cdot\sec^2 x$

h) $y'=-\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{2-x^3}}$; *i)* $y'=\dfrac{e^{3x}\left(3x^2+x+3\right)}{\sqrt{x^2+1}}$; *j)* $f'(x)=\text{sen }x\cdot\cos x\cdot(1+\text{sen }x)$;

k) $y'=\dfrac{1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$; *l)* $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)\cdot\sqrt{1-x^2}}$; *m)* $y'=\dfrac{2x+1-2\cdot(x+1)\cdot\ln\left(x^2+x\right)}{x^3(x+1)}$;

n) $f'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)\cdot\sqrt{1-x^2}}$; *o)* $y'=\dfrac{5x^3-3}{3\cdot\sqrt[6]{x^4\cdot\left(2x^3-3\right)^5}}$; *p)* $y'=-\dfrac{\text{sen}^2x-\text{sen }x+1}{\text{sen }x\cdot\cos x}$;

q) $f'(x)=\dfrac{2x\text{sen }x+x^2\cos x-x^2\text{sen }x\cdot\ln 2}{2^x}$; *r)* $y'=\dfrac{1}{\left(1+\text{arctg}^2x\right)\cdot\left(1+x^2\right)}$;

s) $f'(x)=\dfrac{4x^3-6x}{\left(x^4-3x^2-1\right)\cdot\ln 10}$; *t)* $f'(x)=3\cdot\left(x+\cos^4 x\right)^2\cdot\left(1-4\cdot\text{sen }x\cdot\cos^3 x\right)$;

u) $y'=-\dfrac{\text{sen }x}{2\cdot\sqrt{2\cdot(1+\cos x)}}$; *v)* $f'(x)=-\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$; *w)* $y'=\dfrac{5^x\cdot x^4\cdot(2\cdot\ln 5\cdot x+9)}{2\cdot\sqrt{5x}}$;

x)

$$f'(x)=\frac{-20x^2\,\text{sen}(5x+3)-20x\cdot\text{sen}(5x+3)-20\cdot\text{sen}(5x+3)-8x\cdot\cos(5x+3)-4\cdot\cos(5x+3)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

y) $y'=-\frac{1}{2}\cdot\text{tg}\ x$ *; z)* $y'=-\frac{(x+1)\cdot\text{sen}\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2+2x}}$ *; aa)* $f'(x)=-\frac{1}{\text{sen}\ x}$ *;*

bb) $f'(x)=\frac{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}{\left(1-\text{tg}\frac{x}{2}\right)^2}$ *; cc)* $y'=\frac{2\cdot\text{sen}\ x\cdot\cos\ x}{\left(1+\text{sen}^2x\right)^2}$ *;*

dd) $y'=2x\cdot\cos\ x^2\cdot\cos\left(\text{sen}\ x^2\right)\cdot\cos\left(\text{sen}\left(\text{sen}\ x^2\right)\right)$*; ee)* $f'(x)=\frac{2x^5+x^4+16x^3-x^2+x-15}{\left(x^4+1\right)\cdot\left(x^2+16\right)\cdot(x+1)}$

ff) $f'(x)=\frac{x^2-1}{\left(x^4+3x^2+1\right)\cdot\text{arctg}\frac{1+x^2}{x}}$

13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $y=\text{sen}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$, en $x=\pi$.

b) $y=2^x\cdot\left(x^2+x+1\right)$, en $x=0$.

c) $y=2\cdot(x-1)\cdot\ln(x)+(x+1)\cdot2^x$, en $x=1$.

d) $y=\ln\sqrt{x}$, en $x=1$.

e) $y=\text{arctg}\frac{1}{x}$, en $x=\sqrt{3}$.

Sol: a) $y'(\pi)=-\frac{1}{2}$, *b)* $y'(0)=1+\ln 2$, *c)* $y'(1)=2+4\cdot\ln 2$, *d)* $y'(1)=\frac{1}{2}$, *e)* $y'\left(\sqrt{3}\right)=-\frac{1}{4}$.

14. Calcula la derivada de:

a) $f(x)=x^x$

b) $f(x)=(\cos\ x)^{\text{sen}(2x)}$

c) $y=\left(x^2+2x-1\right)^{2x+3}$

d) $f(x)=(\text{arcsen}\ x)^{\text{arctg}\ x}$

e) $y=\left[\ln\left(x^2+x+1\right)\right]^{\text{arctg}\left(x^2+1\right)}$

Sol: a) $f'(x)=x^x\cdot(1+\ln\ x)$*;*

b) $f'(x)=2\cdot\cos(2x)\cdot(\cos\ x)^{\text{sen}(2x)}\cdot\ln(\cos\ x)-\text{sen}\ x\cdot\text{sen}(2x)\cdot(\cos\ x)^{\text{sen}(2x)-1}$*;*

c) $y'=2\cdot\left(x^2+2x-1\right)^{2x+3}\cdot\ln\left(x^2+2x-1\right)+(2x+3)\cdot(2x+2)\cdot\left(x^2+2x-1\right)^{2x+2}$*;*

d) $f'(x)=\frac{(\text{arcsen}\ x)^{\text{arctg}\ x}\cdot\ln(\text{arcsen}\ x)}{x^2+1}+\frac{\text{arctg}\ x\cdot(\text{arcsen}\ x)^{\text{arctg}\ x-1}}{\sqrt{1-x^2}}$*;*

e)

$$y'=\frac{2x\cdot\left[\ln\left(x^2+x+1\right)\right]^{\text{arctg}\left(x^2+1\right)}\cdot\ln\left[\ln\left(x^2+x+1\right)\right]}{x^4+2x^2+2}+\frac{(2x+1)\cdot\text{arctg}\left(x^2+1\right)\cdot\left[\ln\left(x^2+x+1\right)\right]^{\text{arctg}\left(x^2+1\right)-1}}{x^2+x+1}$$