GEOMETRÍA ANALÍTICA.

1. Analiza si el triángulo de vértices A (6, 0), B (3, 0) y C (6, 3) es equilátero, isósceles o escaleno.

Sol: Isósceles.

2. El triángulo del ejercicio anterior, ¿es acutángulo, rectángulo u obtusángulo?

Sol: Rectángulo.

3. Repite los ejercicios 1 y 2 para los triángulos de vértices:

a) O (0, 0), A (2, 4) y B (4, 2)
b) P (5, –2), Q (1, –7) y R (–1, –2)
c) A (–1, 7), B (–1, 2), C (–5, 2)
d) A (–1, –2), B (2, –4), C (–2, 4)

Sol: a) Isósceles acutángulo; b) Escaleno acutángulo; c) Escaleno rectángulo; d) Escaleno obtusángulo.

4. Determina el ángulo formado por las rectas:

a) $r \equiv (x, y) = (2,0) + k\cdot(2,3)$ y $s \equiv (x, y) = (-5,7) + k\cdot(-1,4)$.

b) $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{4}$ y $s \equiv x - 2 = \frac{y}{4}$

c) $r \equiv 3x - 2y = 0$ y $s \equiv 3x + 4y + 1 = 0$

d) $r \equiv x + y + 1 = 0$ y $s \equiv x - y = 0$

Sol: a) 47º 43' 35''. b) 12º 31' 44''. c) 86º 49' 13''. d) 90º

5. Las rectas $r \equiv 3x + 2y - 1 = 0$ y $s \equiv x + k\cdot y - 2 = 0$ forman un ángulo de $\pi/3$ radianes. Halla k.

Sol: $k = \frac{-24 \pm 13\cdot\sqrt{3}}{3}$.

6. Halla el área del triángulo que la recta $r \equiv x - 2y + 4 = 0$ forma con los ejes de coordenadas.

Sol: 4 u^2.

7. Determina si los puntos A (3, –1), B (0, 0) y C (–1/2, 1/6) están o no alineados.

Sol: Están alineados.

8. Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son A (0, 0) y B (8, 0) y su centro es Q (6, 2). Calcula los otros vértices, la ecuación de las diagonales, el ángulo que forman, la longitud de cada diagonal y el área del paralelogramo.

Sol: C (12, 4), D (4, 4), x + y – 8 = 0, x – 3y = 0, 63º 26' 6'', $4\sqrt{2}$ *u,* $4\sqrt{10}$ *u, 32* u^2.

9. Dos vértices opuestos de un rombo son los puntos A (3, 5) y C (2, 1). El vértice B pertenece al eje de abscisas. Calcula las coordenadas del cuarto vértice D.

Sol: $D\left(-\frac{19}{2},\ 6\right)$

10. Un paralelogramo tiene su centro en el punto M (2, 3) y dos de sus lados están sobre las rectas $y = 2x$ e $y = \frac{1}{2}x$. Halla las coordenadas de sus vértices y su área.

Sol: $(0,\ 0)$, $\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, $(4,\ 6)$, $\left(\frac{8}{3},\ \frac{16}{3}\right)$; $\frac{16}{3}$ u^2.

11. Halla el punto simétrico del punto A (3, 2) respecto de la recta $2x + y - 12 = 0$.

Sol: (31/5, 18/5)

12. Determina qué punto de la recta $r \equiv x + y - 2 = 0$ es el más cercano al punto A (0, –1).

Sol: $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

13. Calcula las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto A (2, 3) y forman con la recta $s \equiv 2x + y - 1 = 0$ un ángulo de 45º.

Sol: $x + 3y - 11 = 0$, $3x - y - 3 = 0$.

14. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x - 3 = 0$ y $2x + y - 5 = 0$ y forma un ángulo de π/6 radianes con la primera.

Sol: $\sqrt{3}\cdot x - y - 3\sqrt{3} - 1 = 0$ *ó* $\sqrt{3}\cdot x + y - 3\sqrt{3} + 1 = 0$.

15. La recta $2x - 3y + 12 = 0$ determina con los ejes coordenados un segmento AB. Halla la ecuación de la mediatriz de AB.

Sol: $3x + 2y + 5 = 0$

16. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto P (1, 2) y forma con los ejes de coordenadas un triángulo de 4 u^2 de superficie.

Sol: $2x + y - 4 = 0$.

17. El triángulo ABC tiene de área 6 u^2. Los vértices A y B son A (1, –3) y B (2, 1). El vértice C está en la recta x + y + 3 = 0. Determina el vértice C.

Sol: $C\left(\frac{16}{5},\ -\frac{31}{5}\right)$ *ó* $C\left(-\frac{8}{5},\ -\frac{7}{5}\right)$

18. Halla la distancia entre las rectas $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3}$ y $s \equiv 6x - 4y - 1 = 0$.

Sol: $\frac{5\sqrt{13}}{26}$ *u.*

19. Un punto P dista lo mismo de A (6, 10) y de B (–4, 8). Su distancia al eje de abscisas es el doble que al eje de ordenadas. Determina las coordenadas de P.

Sol: $P(2,\ 4)$ *ó* $P\left(\frac{14}{3},\ -\frac{28}{3}\right)$.

20. Dado el triángulo de vértices A (7, –7), B (1, –5) y C (3, 1), calcula:

a) Las longitudes de sus tres medianas.
b) Las longitudes de sus tres alturas.
c) Su ortocentro.
d) Su baricentro.

Sol: a) $5\sqrt{2}$ *u,* $2\sqrt{5}$ *u,* $5\sqrt{2}$ *u. b)* $2\sqrt{10}$ *u,* $2\sqrt{5}$ *u,* $2\sqrt{10}$ *u. c) (1, –5).*

d) $\left(\frac{11}{3},\ -\frac{11}{3}\right)$

21. Halla las ecuaciones de las alturas y el ortocentro del triángulo cuyos vértices son A (2, 0), B (0, 1) y C(–3, –2).

Sol: $2x - y + 4 = 0$, $5x + 2y - 2 = 0$, $x + y - 2 = 0$, $\left(-\frac{2}{3},\ \frac{8}{3}\right)$.

22. Halla las ecuaciones de las mediatrices y el circuncentro del triángulo del ejercicio anterior.

Sol: $4x - 2y - 3 = 0$, $10x + 4y + 9 = 0$, $x + y + 2 = 0$, $\left(-\frac{1}{6},\ -\frac{11}{6}\right)$.

23. Halla el área del círculo circunscrito al triángulo del ejercicio anterior.

Sol: $\frac{145\cdot\pi}{18}$ u^2.

24. Determina las ecuaciones de las medianas y el baricentro del triángulo anterior.

Sol: $x - 7y - 2 = 0$, $4x - y + 1 = 0$, $5x - 8y - 1 = 0$, $\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$

25. Determina las ecuaciones de las tres bisectrices de los ángulos interiores del triángulo cuyos lados tienen de ecuaciones: $AB \equiv 4x + 3y = 0$, $AC \equiv 5x - 12y = 0$ y $BC \equiv 3x - 4y + 21 = 0$. Halla también el incentro y el área del círculo inscrito al triángulo.

Sol: $7x - y + 21 = 0$, $3x + 11y = 0$, $64x - 112y + 273 = 0$, $\left(-\dfrac{231}{80}, \dfrac{63}{80}\right)$, $\dfrac{21609\cdot\pi}{6400}$ u^2.

26. El lado desigual de un triángulo isósceles tiene por extremos A (–1, –1) y B (4, 0). El vértice C pertenece a la recta x – 2y + 8 = 0. Determina las coordenadas de C, la longitud de la altura que pasa por C y el área del triángulo.

Sol: C (2, –3); $h_C = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$ *u;* $A = \dfrac{13}{2}$ u^2.

27. El triángulo ABC es isósceles. El lado desigual tiene por extremos A (3, 1) y B (–2, 3). El vértice C está en el eje de ordenadas. Halla las ecuaciones de los lados del triángulo y su área.

Sol: $2x + 5y - 11 = 0$, $x - 12y + 9 = 0$, $9x + 8y - 6 = 0$, $\dfrac{29}{8}$ u^2.

28. Halla la recta que pasa por el punto de corte de las rectas $x + 4y - 18 = 0$ y $x + 2y - 2 = 0$ y cuya distancia al origen de coordenadas es 2 u.

Sol: $5x + 12y - 26 = 0$ *ó* $3x + 4y + 10 = 0$.

29. Determina un punto de la recta $3x - 5y + 25 = 0$ que diste lo mismo de A (3, 4) y de B (7, 8).

Sol: $\left(\dfrac{15}{4}, \dfrac{29}{4}\right)$.

30. Dadas las rectas $r \equiv x + 2y - 1 = 0$ y $s \equiv 3x - y = 0$, halla la recta simétrica de r respecto de s.

Sol: $6x + 33y - 15 = 0$.